



УДК 517.95, 519.633.6.6

А. Н. Данилин, Л. Н. Пестов

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛАМЕ**

Предложен алгоритм численного решения краевой обратной динамической задачи для системы Ламе на основе линеаризованных представлений кинетической и потенциальной энергии. Приводятся результаты численного моделирования в 3D.

An algorithm of numerical solving the inverse boundary value problem for the dynamical Lamé system on the base of linearized presentations of kinetic and potential energies is proposed. Results of numerical testing in 3D are presented.

**Ключевые слова:** обратные динамические задачи, система Ламе, метод граничного управления, численное решение обратных динамических задач.

**Key words:** inverse dynamical problem, Lamé's system, Boundary Control method, numerical solving inverse dynamical problems.

**Прямая задача**

Пусть  $\mathbb{R}_+^3$  — полупространство с границей  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = 0\}$ . Будем называть *прямой задачей* начально-краевую задачу для системы Ламе (ниже во всех формулах подразумевается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3):

$$\rho u_t^i = \frac{\partial}{\partial x^j} \sigma^{ij}, \quad \theta \in \mathbb{R}_+^3 \times [0, 2T], \quad \sigma^{ij} v_j \Big|_{\Gamma \times [0, T]} = f^i, \quad u \Big|_{t=0} = u_t \Big|_{t=0} = 0,$$

где  $\sigma$  — тензор напряжений, связанный с тензором деформаций  $\varepsilon_{ij} = (u_{x^i}^j + u_{x^j}^i) / 2$  законом Гука  $\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}$ ;  $u$  — вектор смещений;  $v$  — вектор внешней нормали границы  $\Gamma$ .

Среда предполагается изотропной:

$$C^{ijkl} = \lambda \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}).$$

Плотность  $\rho$  и параметры Ламе  $\lambda, \mu$  — суть достаточно гладкие (кусочно-гладкие) функции пространственных переменных.

Вектор нормального напряжения  $f$  будем называть (*граничным*) *управлением* и предполагать, что

$$f(x, t) = r(t-s) \delta_\Gamma(x-x') v, \quad x' \in \Gamma_0, \quad s \in [0, T],$$

где  $r(t)$  — импульс Рикера;  $\delta_\Gamma$  — дельта-функция на  $\Gamma$ ;  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  — ограниченная область, по которой пробегают точечные источники (*апертура*). Заметим, что вектор-функция  $f$  всегда направлена по нормали. Решение прямой задачи обозначим  $u^f$ , тензор деформаций и тензор напряжений  $\varepsilon^f$  и  $\sigma^f$  соответственно.



## Обратная задача

Обратная задача состоит в определении  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  по оператору реакции  $R^{2T}$ ,  $R^{2T}f = u^f|_{\Gamma_0 \times [0, 2T]}$ . Из кинематических соображений очевидно, что оператор реакции «ничего не знает» о коэффициентах в множестве  $\Omega^T = \{x \in \mathbb{R}_+^3 \mid \text{dist}(x, \Gamma_0) \leq T\}$ , заполненного волнами к моменту  $T$ . Здесь  $\text{dist}(x, \Gamma_0)$  — время распространения возмущения от точки  $x$  до апертуры. Поэтому речь идет об определении  $\rho|_{\Omega^T}$ ,  $\lambda|_{\Omega^T}$ ,  $\mu|_{\Omega^T}$ .

Предлагается приближенное решение, основанное на линеаризованных представлениях кинетической и потенциальной энергии. Данная работа — попытка численно решить обратную задачу на основе идей метода граничного управления [1–2], ограничившись самыми простыми средствами, не решая задачу граничного управления.

82

## Билинейные формы

Введем билинейные формы (относительно управлений), соответствующие кинетической и потенциальной энергии в момент времени  $T$ :

$$K^T(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \rho(x)(u_i^f(x, T), u_i^g(x, T))dx, \quad P^T(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} (C^{ijkl} \varepsilon_{ij}^f \varepsilon_{kl}^g)(x, T)dx.$$

Обе формы явно определяются оператором реакции:

**Теорема.** Для любых управлений  $f, g$  имеют место равенства

$$K^T(f, g) = \int_0^T dt \int_{\Gamma} [(\partial_t R^{2T} g, f) + \frac{1}{2}(\partial_t R^{2T} f, g)]d\Gamma, \quad (1)$$

$$P^T(f, g) = \int_0^T dt \int_{\Gamma} [(\partial_t R_+^{2T} g, f) + \frac{1}{2}(\partial_t R^{2T} f, g)]d\Gamma, \quad (2)$$

где  $a_{\pm}(\cdot, t) = (a(\cdot, t) \pm a(\cdot, 2T - t)) / 2$ .

*Доказательство.* Имеет место дифференциальное тождество

$$[\rho(u_i^f, \partial_t u_{\pm}^g) + C^{ijkl} \varepsilon_{ij}^f (\varepsilon_{kl}^g)_{\pm}]_t = \text{div}(\partial_t u_{\pm}^g \cdot \sigma^f + u_i \cdot \sigma_{\pm}^g),$$

где  $a \cdot \sigma$  — свертка векторного поля  $a$  с симметричным тензором  $\sigma : (a \cdot \sigma)_j = a^i \sigma_{ij}$ . Интегрируя тождество по  $\Omega \times [0, T]$ , имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(u_i^f, u_i^g)(x, T)dx &= \int_{\Gamma \times [0, T]} [(\partial_t u_{-}^g, f) + (u_i^f, g_{-})] dt d\Gamma, \\ \int_{\Omega} (C \varepsilon^f, \varepsilon^g)(x, T)dx &= \int_{\Gamma \times [0, T]} [(\partial_t u_{+}^g, f) + (u_i^f, g_{+})] dt d\Gamma. \end{aligned}$$

С учетом  $g|_{t>T} = 0$  получаем (1)–(2).  $\square$

## МКЭ-аппроксимация

Пусть  $\Gamma_0$ -прямоугольник и  $\Pi^T \supset \Omega^T$  — параллелепипед. На части границы  $\partial\Pi^T \setminus \Gamma_0$  зададим нулевые условие Неймана. Введем триангуляционную сетку Делоне в  $\Pi^T$  и соответствующие базисные векторные поля  $\varphi_p$ ,  $p = 1, \dots, 3N$  ( $N$  — число узлов сетки), соответствующие стандартным базисным функциям метода конечных элементов (МКЭ).



Тогда аппроксимация Галеркина  $u_N^f(x, t) = \sum_{p=1}^{3N} U_p(t)\varphi_p(x)$  решения прямой задачи приводит к задаче Коши  $MU_t + KU = F, U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0$ , где

$$M_{pq} = \int_{\Omega} \rho(x)(\varphi_p(x), \varphi_q(x))dx, \quad K_{pq} = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} [\lambda \frac{\partial \varphi_q^i}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_p^j}{\partial x^j} + \mu \frac{\partial \varphi_q^i}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_p^j}{\partial x^i} + \mu \frac{\partial \varphi_q^j}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_p^i}{\partial x^j}] dx -$$

матрицы масс и жесткости соответственно, а  $F_{pa}(t) = \int_{\Gamma} (\varphi_p(x), f_a(x, t))d\Gamma$  –

матрица-функция граничных управлений. Заметим, что стандартные

базисные функции МКЭ обеспечивают  $(u_N^f)^1(x_p, t) = U_p(t), p = 1, \dots, N,$

$(u_N^f)^2(x_p, t) = U_p(t), p = N + 1, \dots, 2N, (u_N^f)^3(x_p, t) = U_p(t), p = 2N + 1, \dots, 3N.$

Будем использовать кусочно-постоянную модель плотности и коэффициентов Ламе. Тогда

$$M_{pq} = \sum_{k=1}^{N_{\Delta}} \rho_l M_{pq}^l, \quad M_{pq}^l = \int_{\Delta_l} (\varphi_p(x), \varphi_q(x))dx, \quad l = 1, \dots, N_{\Delta},$$

$$K_{pq} = \sum_{k=1}^{N_{\Delta}} (\lambda_l K_{\lambda pq}^l + \mu_l K_{\mu pq}^l), \quad K_{\lambda pq}^l = \int_{\Delta_l} \lambda \frac{\partial \varphi_q^i}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_p^j}{\partial x^j} dx,$$

$$K_{\mu pq}^l = \int_{\Delta_l} [\mu \frac{\partial \varphi_q^i}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_p^j}{\partial x^i} + \mu \frac{\partial \varphi_q^j}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_p^i}{\partial x^j}] dx, \quad l = 1, \dots, N_{\Delta}.$$

Данные обратной задачи – компоненты вектор-функции  $U_p(t), t \in [0, 2T]$ , соответствующие граничным узлам  $x_p \in \Gamma_0$ . Аналогами билинейных форм (1)–(2) являются матрицы  $C^T = U^*(T)MU(T), P^T = U^*(T)KU(T),$  (\* означает транспонирование), которые, как можно показать, явно определяются данными обратной задачи.

### Алгоритм реконструкции

Пусть (кусочно-постоянные) коэффициенты  $\rho, \lambda, \mu$  лежат в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности «фоновых» коэффициентов  $\rho_0, \lambda_0, \mu_0$ . В силу непрерывной зависимости решения прямой задачи от коэффициентов уравнения имеет место  $U_0^*(T)MU_0^*(T) = C^T + O(\varepsilon), U_0^*(T)KU_0^*(T) = P^T + O(\varepsilon),$  где  $U_0(T)$  соответствует  $\rho_0, \lambda_0, \mu_0$  и тем же управлениям.

Рассмотрим линейные уравнения относительно  $\tilde{\rho}_k, \tilde{\lambda}_k, \tilde{\mu}_k$ :

$$\begin{aligned} A\tilde{\rho} &:= U_0^*(T)\tilde{\rho}_l M^l U_0^*(T) = C^T, \\ B(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) &:= U_0^*(T)(\tilde{\lambda}_l K_{\lambda}^l + \tilde{\mu}_l K_{\mu}^l)U_0^*(T) = P^T. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда  $(\tilde{\rho}_k - \rho_k)U_0^*(T)M^k U_0^*(T) = O(\varepsilon)$  (и аналогично для  $\lambda, \mu$ ). Но некорректность обратной задачи влечет плохую обусловленность линейных отображений  $A: \mathbb{R}^{N_{\Delta}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_c(N_c+1)/2}, B: \mathbb{R}^{2N_{\Delta}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_c(N_c+1)/2}$  плохо обусловлены.

(Более того, существует гипотеза, что отображение  $B$  даже не инъективно для рассматриваемых управлений.)

Поэтому для решения уравнений (3) необходима регуляризация. В численных примерах, приведенных ниже, регуляризация уравнений (3) состояла в том, что применялась кусочно-постоянная модель  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\mu}$  на более грубой сетке. Также использовались априорные ограничения на коэффициенты (задавался априорный диапазон значений).

В сейсмике часто считается выполненным определенное соотношение между скоростями продольных и поперечных волн. В расчетах применялось априорное соотношение  $c_p/c_s = 1,8$ , что позволяет уменьшить число неизвестных. Численное решение прямой и обратной задачи производилось в среде MATLAB. При восстановлении коэффициентов использовалась процедура quadprog (минимизация квадратичной функции на заданном множестве).

### Численные эксперименты

Рассмотрены две небольшие трехмерные модели: модель с включениями и модель с границей. Параметры задачи следующие:  $T = 0,01$  с, размеры области  $\Pi^T : 48 \times 48 \times 19,2$  (м), количество тетраэдров 19200, преобладающая частота импульса Рикера 30 Гц, скорость продольных волн 1600–2000 м/с. Количество источников 25, задержек по времени – 50. То есть количество управлений 1250. Ниже на рисунках 1–4 представлены модели и реконструкции плотности и скорости продольных волн. На рисунке 1, а указано расположение источников.

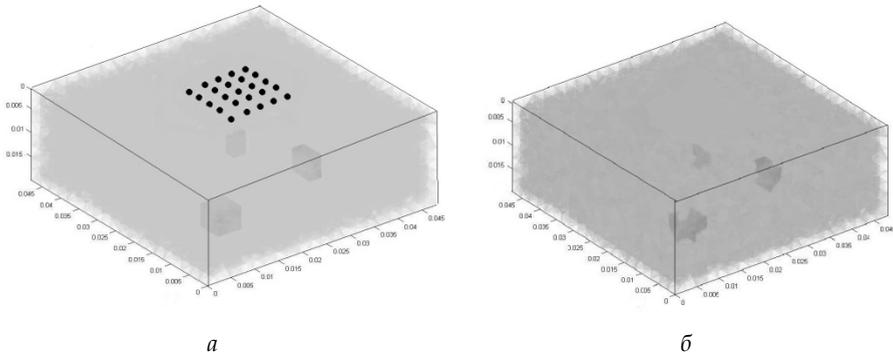


Рис. 1: а – модель скорости продольных волн, «включения»; б – реконструкция

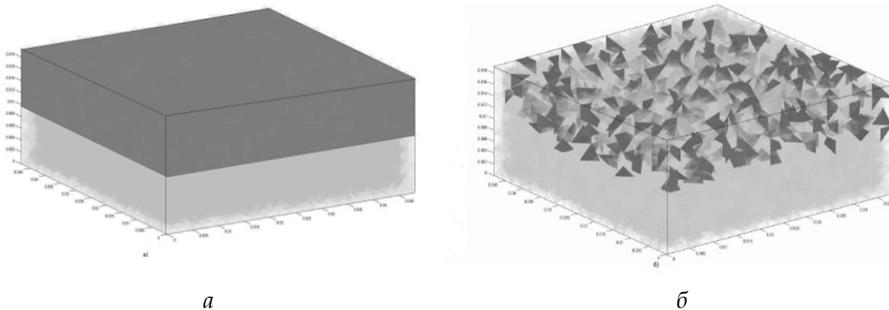


Рис. 2: а – модель скорости продольных волн, «граница»; б – реконструкция

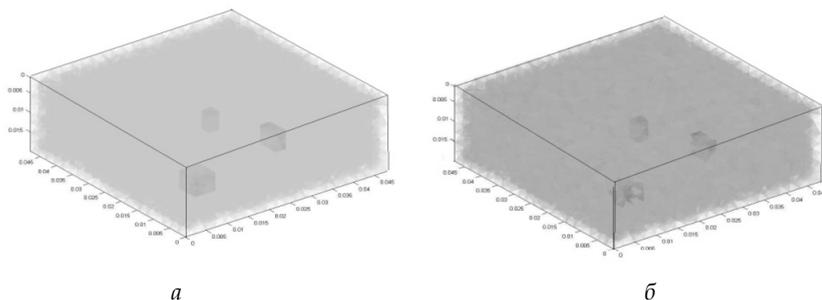


Рис. 3: *а* – модель плотности, «включения»; *б* – реконструкция

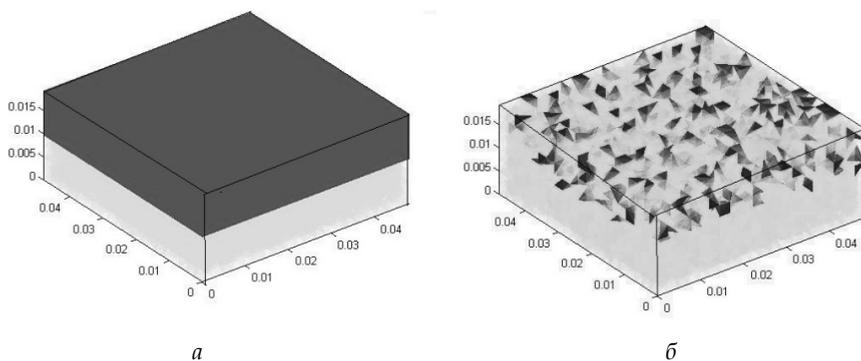


Рис. 4: *а* – модель плотности, «включения»; *б* – реконструкция

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проекту 12-01-00260а.*

### Список литературы

1. Belishev M. I. Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC-method) // *Inverse Problems*. 1997. N 13. R1 – R45.
2. Belishev M. I. Boundary control method in dynamical inverse problems // *An introductory course by Belishev M. I. Gladwell G. M. L., Morassi A., Editors. Dynamical Inverse Problems: Theory and Application. CISM Courses and Lectures, Vol. 529. Wien: Springer, 2011. P. 85 – 150.*

### Об авторах

Данилин Александр Николаевич – науч. сотр., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

E-mail: [adanilin@kantiana.ru](mailto:adanilin@kantiana.ru).

Пестов Леонид Николаевич – гл. науч. сотр., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

E-mail: [lpestov@kantiana.ru](mailto:lpestov@kantiana.ru).

### Authors

Alexandr Danilin – researcher, I. Kant Baltic Federal University.

E-mail: [adanilin@kantiana.ru](mailto:adanilin@kantiana.ru).

Leonid Pestov – principal scientist, I. Kant Baltic Federal University.

E-mail: [lpestov@kantiana.ru](mailto:lpestov@kantiana.ru).